第 1 回 Hi-Stat レクチャー

長期記憶時系列分析について

第 1 日 モデルの定義とその必要性，既存のモデルとの関係

片山 直也*

一橋大学

日時：平成 16 年 2 月 19 日（木）16:30 - 18:00

会場：一橋大学第 2 研究館 2 階 217 小会議室

[1] 山本拓先生をはじめとする COE 関係者に感謝する．演者は一橋大学大学院経済学研究科の博士課程 4 年で，COE：社会科学の統計分析拠点構築の RA でもある．E-MAIL: ged0104@srv.cc.hit-u.ac.jp

2004 年 2 月 25 日作成

❑ はじめに

レクチャーにあたり，注意点をいくつか列挙する．

- 時系列解析の前提知識として，定常時系列の基礎知識を既知として話すが重要な点は触れることにする．
- 長期記憶モデルはその難解さから敬遠されがちである．そのため，さわりの部分を重点的に話す（個々の聴衆の期待する応用面に踏み込めないことをお詫びする）．
- 時間制約と演者の能力と好みから長期記憶モデルの全てを話せないため，紹介する内容には偏りがある．なるべく有効な情報を提供するように努めるが，この偏りに留意し，引用している文献等をあたっていただくことを期待する．
- 実用性を考え，（株）数理システムの販売する統計処理ソフト，S-PLUS を用いた入出力結果やグラフを紹介する．また S-PLUS の内蔵する関数の紹介もする．演者の組んだ S-PLUS のプログラム（S-code）も公開可能だが，膨大なものなのでここにはほとんど記載しない．
- 初日のレクチャーでは，長期記憶モデルを既存のほかのモデルと比較しながら様々な角度から眺めることで，モデルの存在意義を明らかにしてもらうことを目的とする．
- 2 日目のレクチャーでは統計的推論と予測の手法を紹介することで，長期記憶モデルの扱い方を理解してもらうことを目的とする．
- 引用している文献は最後に記載する．
- この資料は [13] を大いに参考・引用している．レクチャーの準備段階でこの本を読むと，この本を読んでほしいと言うだけでよいのではないかと思ったほどであった．しかしそれではつまらないので [13] に記載されている内容の部分も行間の部分を努めて説明することにした．また [13] に記載されていない，レクチャーの水準内かつ演者の興味のあるものも加えた．
- 発表では他の文献からの図表も多数用いているがここには記載していない．

1　長期記憶過程の定義と背景

1.1　（弱）定常過程の定義

ある確率過程 $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ の平均，分散，とラグ j の自己共分散 $\gamma(j)$ が,

- $\mathrm{E}(x_t) = \mu$　(μ はある定数)
- $\gamma(0) = \mathrm{Var}(x_t) = \mathrm{E}(x_t - \mu)^2 < \infty$　($\gamma(0)$ はある正の定数で，時点 t に依存しない)
- $\gamma(j) = \mathrm{Cov}(x_t, x_{t+k}) = \mathrm{E}(x_t - \mu)(x_{t+j} - \mu)$　($\gamma(j)$ は j のみに依存し時点 t に依存しない)　(1)

が全ての t について成立するとき，$\{x_t\}$ は**定常過程**である（またはその性質を指して，**定常**であると言ったり，**定常性**をもつ）という．

✎ **強定常時系列過程**なる定義もあるために，この定義を**弱定常過程**ということもある．

1.2　長期記憶過程と短期記憶過程の定義

ある定常な過程 $\{x_t\}$ のラグ j の自己共分散 $\gamma(j)$ が，次のような性質を持つとき，各々，**ロングメモリー（長期記憶）**過程，**インターミィディエイトメモリー（中期記憶）**過程という．

- $\gamma(j) \equiv \mathrm{E}\left[x_t x_{t+j}\right] = O\big(j^{2d-1}\big)$ as $j \to \infty$; $d < 1/2$,
- $\sum_j |\gamma(j)| \begin{cases} = \infty, & \textbf{long memroy,} \\ < \infty, & \textbf{intermediate memory.} \end{cases}$　(2)

$\{x_t\}$ は**長期性**をもつということもある．

✎ 長期性の定義にはスペクトル密度関数を用いた定義（スペクトル密度関数が有限個の周波数で発散することで定義）等もあるが，ここでは自己相関関数の減衰による定義を採用した．

一方，古典的な定常 ARMA（SARMA）モデルはこのような性質を持っていない（これら 2 つのモデルについては既知だと思われるが後に定義する）．

- $\gamma(j) = O\big(\alpha^j\big)$ as $j \to \infty$, where $\alpha \in (0, 1)$;
- $\sum_j |\gamma(j)| < \infty$.　(3)

対応させる形で，このような性質を持つ過程を**ショートメモリー（短期記憶）**過程ということもある．

✎ 定常 ARMA（SARMA）モデルのスペクトル密度関数はいたるところ有界である．

1.3　古典的モデルの概要（ARIMA モデル，単位根モデル）

一般にデータは非定常性であるため，Box と Jenkins による著書 [2] にあるように，差分を取ることで，データを短期記憶過程に加工し，モデリングを行えばよいとされていた．即ち，既知の正の整数 m を用いて，

$$(1 - L)^m x_t = y_t \qquad (\{y_t\}\ \text{は短期記憶過程}) \tag{4}$$

とすることを提案した．他に，対数変換，Box = Cox 変換などの様々なデータ変換を組み合わせることにより短期記憶過程 $\{y_t\}$ への変換が模索されてきた．

有名かつ頻繁に用いられる時系列モデルの 1 つに [2] による**自己回帰和分移動平均（autoregressive integrated moving average: ARIMA）モデル**が挙げられよう，

$$\phi(L)\{(1-L)^d x_t - \mu\} = \theta(L)\varepsilon_t \tag{5}$$

ここで，$\phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \phi_j z^j$，$\theta(z) = 1 + \sum_{j=1}^{p} \theta_j z^j$ であり $\phi(z) = 0$ と $\theta(z) = 0$ の根の絶対値が全て 1 より大とする．μ は平均を表すパラメータで，$\{\varepsilon_t\}$ は独立かつ同一の分布に従う確率変数列で平均 0 で分散 σ^2 とする．d は整数値のパラメータである．記号化して，**ARIMA**(p,d,q) **モデル**ということもある．また，上で定義した ARIMA モデル $\{x_t\}$ において

$$(1-L)^d x_t = y_t, \quad \phi(L)(y_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$$

で表される確率過程を $\{y_t\}$ は**自己回帰移動平均（autoregressive moving average: ARMA）モデル**という．

また $d = 1$ のとき，いわゆる**単位根（ユニットルート）過程**で

$$(1-L)x_t = x_t - x_{t-1} = y_t \qquad (\{y_t\} \text{ は短期記憶過程}) \tag{6}$$

とかける．これは単位根（ユニットルート）モデルということもある．また **I**(1) **過程**という記号を用いることが多い．また d が整数値（$d = 0, 1, 2$ 等）であるときも拡張して **I**(d) **過程**という．

1.4 短期記憶過程の限界

3 つの側面から ARIMA モデルに代表される Box=Jenkins のモデリングには限界がある．以下それを説明する[*1]．

短期記憶性の仮定: ARMA モデルでは時間間隔が大きくなるにつれ，急速に観測値間の相関係数が 0 に収束する（短期記憶性）．従って，時間間隔が大きくなっても観測値間の自己共分散が無視できないような長期記憶性をもつデータへの当てはまりはよくない．例えば，この長期記憶性を無視して，ごく最近の過去の観測値のみを用いて将来の値を予測しようとすると，精度の高くない予測値になってしまう恐れがある．

同定段階で差分パラメータ d を既知とする仮定: Box=Jenkins のモデリングでは ARIMA(p,d,q) モデルの整数値差分パラメータ d を既知として議論している．より正確に言えば，同定段階で自己相関関数や偏自己相関関数等を用いたグラフより，d を決定すればよいとしている．しかしながら，実際にはそれらのグラフから正確に d を決められることは稀である．

グラフによる決定方法は，欠点として，(1) 学者の恣意性による，(2)（他の加工法も含め）どのような差分（加工）でプロットしても同定（決定）できないことがある．

しかし，(1)' グラフを用いることによりデータ間の従属関係を直感的に把握できる長所もあるし，(2)' いくつかの検定との併用をすればある程度差分パラメータを決める助けになる，という反論もあろう．

しかし，これらも反論としては決定的ではない．結果として，(1)" どの同定でもうまくいかない，ことや，(2)" 検出力とサイズの関係から検定結果は鵜呑みにできない，ためである．具体的には

$$\begin{aligned} &(\text{検定問題 } 1) \qquad H_0: \text{ 真の過程は } I(0) \quad \text{vs} \quad H_1: \text{ 真の過程は } I(1), \\ &(\text{検定問題 } 2) \qquad H_0': \text{ 真の過程は } I(1) \quad \text{vs} \quad H_1': \text{ 真の過程は } I(0) \end{aligned} \tag{7}$$

なる 2 つの検定を実行すると，共に帰無仮説が棄却されるケースがあげられる．

データ加工による情報のロス: データを差分を取ること等により加工するということはもとのデータの情報を部分的に捨てることを意味する．これは（理論上）扱いやすいデータへ変換する反面，推定，予測の段階で，悪影響を及ぼす．できれば元のデータのままでモデリングを行うに越したことはない．

[*1] この部分の記述は [13] を参考にした．

1.5　長期記憶過程を採用（を検討）するいくつかの理由

上記の議論に加えて，長期記憶過程を採用する理由をいくつか挙げる．

最良の統計量を構築するための理論拡張の必要性: 我々は真のモデルを知らない状態で，有限標本からいかにして，(1) モデリングを行い統計解析より経済理論の検証を行うか？，(2) 将来観測されるデータを予測するか？等を問題意識として持ちあわせている．しかし，既存のモデルで十分な結果が得られることは稀であり，批判的にデータ解析を行えば，目的とする解析結果まで到達するケースは決して多くない．複雑な時系列構造を説明するために，理論的整合性と論理構造を十分に解明し，実用化まで到達させる作業は研究者の義務であろう．

長期性を示すと思われる様々なデータ: 古くから観測値の間の相関係数が，時間の推移とともに緩慢にしか減衰しない時系列データの存在が，経済学，天文学，水文学，工学，農学など広範な分野にわたって報告されている．このような現象を示す時系列データの存在は，長期記憶モデルによる当てはめがうまくいく可能性があることを示唆している．

後にグラフを用いて，長期記憶モデルに従うと思われるデータの自己相関等の基本統計量の解析結果を示す．

2　定常長期記憶モデルの性質

前節では従来のモデルの限界と長期記憶モデルの必要性を示した．以下，長期記憶モデルの典型的なモデル（**フラクショナル ARIMA モデル: ARFIMA モデル**）を用いて，長期記憶モデルの性質を概観する．比較のため，短期記憶過程の性質も示す．また長期記憶モデルに従うと思われる実際のデータの基本統計量の結果も示す．

2.1　フラクショナル ARIMA モデル: ARFIMA モデル

最も使われているモデルの 1 つである，**フラクショナル ARIMA モデル: ARFIMA モデル**は次で定義される．

$$\phi(L)(1-L)^d x_t = \theta(L)\varepsilon_t \tag{8}$$

ここで d は（整数値を含め）実数値を許す．$(1-L)^d$ のラグ多項式は 2 項級数展開

$$(1-L)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j(d) z^j, \qquad \pi_j(d) = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} \tag{9}$$

で定義される．ここで $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．また $\pi_0(d) = 1$ である．

✎ 記号化して (8) の ARFIMA モデルを **ARFIMA(p,d,q) モデル**または **FARIMA(p,d,q) モデル**と書くことが多い．因みに ARFIMA モデルを日本語で言えば，**自己回帰実数和分移動平均モデル**となる．英語も日本語も長い呼び名になるので記号で呼ぶことが多い．

✎ (8) の ARFIMA モデルの表現は (5) の ARIMA モデルと全く同じである．しかし，ARIMA モデルは差分パラメータ d を 0 または自然数としているのに対し，ARFIMA モデルは d に実数を許すより広いモデルのクラスを扱っているといえる．

✎ 他によく使われるセミパラメトリックモデルに**フラクショナル・ガウシアン・ノイズ: FGN** モデルがあるが，ここでは紹介しない．

✎ $p = q = 0$ のとき，I(d) 過程に対応させる形で，**FI(d) 過程**という．FI(d) 過程は単に I(d) 過程の d を実数値まで拡張しただけなので，$m = 0, 1, 2, \ldots$ で FI(m) 過程と I(m) 過程は同じモデルである．

以下 FI(d) 過程と ARFIMA(p,d,q) 過程の基本的性質を示す．これは 1 節で定義した長期記憶過程の定義を満たすもので，付随する基本的性質の本質は，長期記憶過程の一般的性質として知られているものである．

2.2 FI(d) 過程の基本的性質

FI(d) 過程

$$(1-L)^d x_t = \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim IID(0,\sigma^2),$$

は $d \in (-1/2, 1/2)$ で定常かつ反転可能（AR(∞) 表現可能）である．よって $d \in (-1/2, 1/2)$ を仮定し，付随する性質を示す．

- MA(∞) 表現は，次で得られる．

$$x_t = (1-L)^{-d}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(d)\varepsilon_{t-j}, \quad \psi_j(d) = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} = \pi_j(-d), \tag{10}$$

- スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ は次で表される．

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1-e^{-i\lambda}|^{-2d} = \frac{\sigma^2}{2\pi}|\sin(\lambda/2)|^{-2d} \tag{11}$$

- 分散 $\gamma(0)$，自己相関 $\rho(h)$，偏自己相関 $\alpha(h)$ は次で表される．

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)^2}, \quad \rho(h) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)}, \quad \alpha(h) = \frac{d}{h-d}. \tag{12}$$

  ✎ それぞれのガンマ関数を用いた表現は漸化式等を用いて（手計算でもプログラムでも）簡単に求める方法がある．

- Stirling の公式 $\Gamma(x) \sim \sqrt(2\pi)e^{-x+1}(x-1)^{x-1/2}$, as $x \to \infty$ を用いて，上の結果は漸近的に，

$$\pi_j(d) \sim \frac{j^{-d-1}}{\Gamma(-d)}, \quad \psi_j(d) \sim \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)}, \quad \rho(j) \sim j^{2d-1}\frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)}, \quad \text{as } j \to \infty \tag{13}$$

  となる．またスペクトル密度関数も漸近的に

$$f(\lambda) \sim \lambda^{-2d}\frac{\sigma^2}{2\pi} \quad \text{as } \lambda \to 0 \tag{14}$$

  となる．

- 上の漸近論より次がわかる．
  - 自己相関の漸近的結果より，FI(d) 過程は，$d \in (0, 1/2)$ であれば長期記憶過程，$d \in (-1/2, 0)$ であれば中期記憶過程，$d = 0$ であれば短期記憶過程である．
  - MA(∞) 表現の係数 $\psi_j(d)$ と AR(∞) 表現の係数 $\pi_j(d)$ の結果から，$d \in (0, 1/2)$ のとき，

$$\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(d)^2 < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j(d)| = \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j(d)^2 < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}|\pi_j(d)| < \infty. \tag{15}$$

    $d \in (-1/2, 0)$ のとき，

$$\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j(d)^2 < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j(d)| < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j(d)^2 < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty}|\pi_j(d)| = \infty. \tag{16}$$

    つまり，2 乗総和可能であるが，d の値に依存し，絶対総和可能でないケースがある．
  - スペクトル密度関数は $d \in (0, 1/2)$ のとき原点で発散する．

✎（数学の結果）絶対総和可能（$\sum_j |a_j| < \infty$）ならば 2 乗総和可能（$\sum_j a_j^2 < \infty$）である．

2.3 ARFIMA(p,d,q) 過程の基本的性質

(8) で定義した ARFIFMA(p,d,q) 過程の基本的性質を以下にあげる．漸近結果のオーダーは FI(d) 過程のそれとパラレルに見ることができる．$d \in (-1/2, 1/2)$ で定常かつ反転可能（AR(∞) 表現可能）である．よって $d \in (-1/2, 1/2)$ を仮定し，付随する性質を示す．ただし各基本統計量の厳密な表現は複雑な高等関数を用いて表現されるためここでは記載しない．

- 自己相関関数 $\rho(j)$ は $\rho(j) \sim Cj^{2d-1}$, as $j \to \infty$．ここで C はある j に依存しない定数である．これから ARFIMA(p,d,q) 過程は，$d \in (0, 1/2)$ であれば長期記憶過程，$d \in (-1/2, 0)$ であれば中期記憶過程，$d = 0$ であれば短期記憶過程である．
- スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ は

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{\theta(e^{-i\lambda})}{\phi(e^{-i\lambda})}\right|^2 \left|2\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d} \sim \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{\theta(1)}{\phi(1)}\right|^2 \lambda^{-2d}, \quad \text{as } \lambda \to 0. \tag{17}$$

  よって $f(\lambda)$ は原点で，$d \in (0, 1/2)$ のときは発散し，$d \in (-1/2, 0)$ のときは 0，$d = 0$ のときは正の定数をとる．
- $d = 0$ のとき，ARMA(p,q) モデルである．

2.4 ARMA 過程の基本的性質

短期記憶過程の 1 つである定常かつ反転可能な ARMA 過程の性質を以下に列挙する．記号はこれまで用いたものと同じである．

- 1 節でも述べたが，自己相関関数は絶対総和可能である．

$$\begin{aligned}&\rho(j) = O\big(\alpha^j\big) \text{ as } j \to \infty, \text{ where } \alpha \in (0,1);\\ &\textstyle\sum_j |\rho(j)| < \infty.\end{aligned} \tag{18}$$

- MA(∞) 表現の係数 ψ_j と AR(∞) 表現の係数 π_j は絶対総和可能である．

$$\psi_j = O(\alpha^j), \quad \pi_j = O(\alpha^j), \quad \text{as } j \to \infty;\ \alpha \in (0,1), \tag{19}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty, \quad \text{（絶対総和可能なので 2 乗総和可能でもある）}. \tag{20}$$

- スペクトル密度関数はいたるところ有界である．

3 非定常長期記憶モデルの性質

前節では定常長期記憶モデルの 1 つである ARFIMA モデルを紹介し，短期記憶過程の 1 つである ARMA モデルの拡張であることを示した．

この節では非定常へ拡張した，**非定常長期記憶モデル**の 1 つとして**非定常 FI(d) モデル**を定義し，いわゆるユニットルート過程などの I(d) 過程の拡張となっていることを示す[*2]．

[*2] ここでは [10] による定義を示す．非定常長期記憶モデルの定義は他にもある．

3.1　非定常 FI(d) 過程の定義

$d \geq 1/2$ のときは FI(d) 過程は非定常となる．そのため，数学的記述のために $I(1)$ 過程でやるのと同じように時点 0 で切断した定義をする．(10) と似た表現で，

$$x_t = (1-L)^{-d}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{t-1}\psi_j(d)\varepsilon_{t-j}, \quad \psi_j(d) = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} = \pi_j(-d), \quad (t \geq 1), \tag{21}$$

また $t \leq 0$ で $x_t = 0$ とする．これは I(1) 過程でよく行っていたモデルの定義を拡張したものである．即ち，

$$x_t = \sum_{j=1}^{t} 1 \times \varepsilon_{t-j} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t, \quad (d = 1 \text{ のとき}; \, t \geq 1). \tag{22}$$

同様に $t \leq 0$ で $x_t = 0$ である．

時点 0 で切断していることから，非定常 FI(d) 過程の AR 表現は

$$(1-L)^d x_t = \sum_{j=0}^{t-1}\pi_j(d)x_{t-j} = \varepsilon_t, \quad (t \geq 1; \, \pi_0(d) = 1), \tag{23}$$

となる．I(d) 過程の AR 表現と異なり，d が自然数でないときは時点 1 までウェイトが存在する．例えば I(1) 過程であれば

$$(1-L)x_t = x_t - x_{t-1} = \varepsilon_t, \quad (t \geq 1), \qquad x_t = 0, \quad (t \leq 0), \tag{24}$$

となり，$\pi_0(1) = 1$, $\pi_1(1) = -1$, $\pi_j(1) = 0$ $(j \geq 2)$ となっている．

3.2　非定常 FI(d) 過程の性質（$d \geq 1/2$）

- AR 表現と MA 表現での非定常 FI(d) 過程の係数は，定常のケースである (13) の結果とパラレルに成立する．つまり，

$$\pi_j(d) \sim \frac{j^{-d-1}}{\Gamma(-d)}, \quad \psi_j(d) \sim \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)}, \quad (\text{as } j \to \infty; \, d \geq 1/2). \tag{25}$$

  これは $d < 1$ であれば（非定常の $d \in [1/2, 1)$ であっても），$\psi_j(d)$ は $j \to \infty$ で緩やかに減衰することを示す（注意として，(22) を見ればわかるが，I(1) 過程のウェイト $\psi_j(d)$ は全て 1 である）．
- x_T が $T \to \infty$ で収束するためのオーダーは次の通りである．

$$x_T = \begin{cases} O_p(\sqrt{\log T}), & (d = 1/2), \\ O_p(T^{d-1/2}), & (d > 1/2) \end{cases} \tag{26}$$

  特に $d = 1$ であれば，中心極限定理より，

$$\frac{1}{\sqrt{T}\sigma}x_T = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{27}$$

  なので $x_T = O_p(T^{1/2})$ であることがわかる．他の d のケースでも上記のオーダーで正規分布へ収束する（**汎関数中心極限定理（FCLT）**を用いる．[10] 参照）．

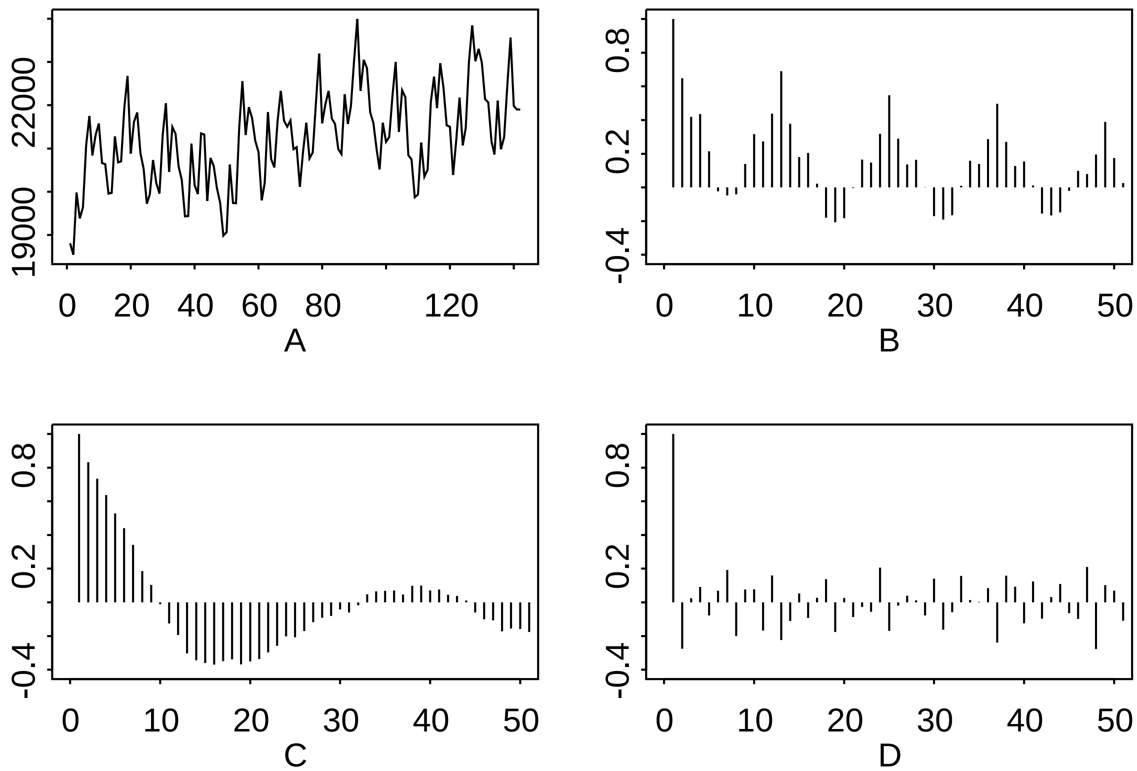
✎ ここでは FI(d) のみ非定常へ拡張したが，非定常 ARFIMA モデルも [10] では定義している．

✎ 1 節で検定問題 (7) を紹介した．（非）定常 FI(d) 過程は I(0) 過程と I(1) 過程の間をとるモデルと解釈できる．これより，検定問題 (7) で共に帰無仮説が棄却されるような場合，モデルを FI(d) 過程（$d \in (0,1)$）と考えることも必要となるであろう．

4　季節性を加味した長期記憶モデル

1980 年代 J.R.M. Hosking 等により提唱された ARFIMA モデルは自己相関が緩やかに減衰するという性質（長期性）をもち, それまでの自己相関が急速に減衰する ARMA モデルや ARIMA モデルを拡張したモデルとして, 計量経済学, ファイナンス，水文学等の分野に幅広く受け入れられ，応用手法が確立されてきた.

しかし現状の ARFIMA モデルなどの長期記憶モデルでは自己相関がある周期で緩やかに減衰するような系列には対処できない.



例を挙げて説明する．上の図 A は月次大口電力需要データの 1990 年 1 月から 2001 年 10 月までのプロット, 図 B から D は各々その原系列, 季節階差分, 季節階差分と一階差分をとった系列の標本自己相関のプロットである．図から自己相関がある周期で緩やかに減衰していることがわかり, 実際 ARFIMA モデルや, 季節 ARIMA$(p, d_0, q)(p_s, d_s, q_s)_s$ モデル (ここで s は偶数, d_0 と d_s は零または正整数で, 以下 SARIMA モデルと略) の時系列解析手順を踏んでもうまく当てはめられない．これは季節性と長期性を持つ月次や四半期の経済データへの適用を妨げることを意味する[*3].

これを意図するものとして，近年，[4]，[9]，[7] や [11] により（k-factor）GARMA モデルなどの季節性を加味した長期記憶過程が提唱され注目を集めているが Box=Jenkins 流の解析手順でいうところの同定, 推定, 検定, 予測の一連の手法はほとんど理論的整備がなされていない.

演者はこれらの背景から季節性と長期性を併せ持つモデルに注目し，推定，検定，予測に関する研究を行な

[*3] 当然ながら，月次（日次）の大口電力需要データの解析には様々な既存の手法を用いたアプローチが存在する．サーベイの範囲内では，(1) SARIMA モデルによる解析，(2) 季節調整法を用いたモデルによる解析，(3) 気象ダミーなどいくつかの定性要因をダミー変数にとり入れた重回帰分析，(4) 非線形回帰分析，(5) ニューラルネットワークによる解析，(6) X-11（または X-12），が挙げられる．しかしながら，これといった決め手となる手法は確立されていないようである．原因とその理由についての考察は別の機会に譲る．

い，その一部を博士論文としてまとめている[4].

5 外生変数を追加した長期記憶モデル

実用性を考えると，長期記憶過程を誤差にもつ回帰モデルを考える必要もあろう．具体的には

$$z_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \cdots + \beta_k x_{k,t} + y_t, \quad (y_t \text{ は ARFIMA}(p,d,q) \text{ モデル}), \tag{28}$$

である．このようなモデルについても推定，検定問題が広く議論されている．具体的には，[10] や [1] を参照.

6 初日の終わりに

参考にした文献を挙げる．

[2] は言わずとしれたボックス＝ジェンキンス流のモデリング法を紹介した古典的名著である．現在の統計解析パッケージにほぼに採用されている ARIMA モデルの解析方法は，理論的解明もほぼ明らかにされつくしたといってよいであろう．

[8] と [6] は長期記憶過程という難解な確率過程の議論を，比較的応用しやすい時系列モデルへ展開したパイオニア的論文といえる．

[3]，[5] は線形時系列の包括的理論書とよべるものであるが，長記憶過程の理論展開も紹介している．[1] は長期記憶過程の専門書である．

長期記憶過程の理論応用分野の議論は現在でも進歩し続けている．昨年，矢島美寛教授により邦文の入門書 [13] が発行された[5]．最新の理論結果にも触れている．

4 節では季節性を加味した長期記憶モデルの必要性を挙げたが，時間制約とレクチャーの水準から深追いを避けた．4 節で挙げた文献をあたってほしい．演者は環境問題やエネルギー問題に関係するデータに興味を持ちその延長で長期記憶モデルの研究をしているが，問題意識のきっかけをいただいたのは，山本拓教授や本多正久教授による大口電力需要データの解析結果（[14] や [12]）であった．

参考文献

[1] Beran, J.: *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman and Hall, London, 1994.

[2] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco, 1976.

[3] Brockwell, P.J. and Davis, R.A.: *Time Series: Theory and Methods*, 2nd ed. Springer, New York, 1991.

[4] Chung, C.-F.: A generalized fractionally integrated ARMA process. *J. Time Ser. Anal.* 17 (1996), 111-140.

[5] Fuller, W.A.: *Introduction to Statistical Time Series,* 2nd ed. John Wiley, New York, 1996.

[6] Granger, C.W.J. and Joyeux, R.: An introduction to long-range time series models and fractional differencing. *J. Time Ser. Anal.* 1 (1980), 15-30.

[7] Gray, H.L., Zhang, N.F., and Woodward, W.A.: On generalized fractional processes. *J. Time Ser. Anal.* 10 (1989), 233-257.

[4] 演者の博士論文をまとめたディスカッションペーパーが COE のホームページよりダウンロード可能である．

[5] 今回のレクチャーも [13] の第 II 部をかなり参考・引用した．この本は刈屋武昭先生，矢島美寛先生，田中勝人先生，竹内啓先生による本で他の部・補論も非常に有益である．

[8] Hosking, J.R.M.: Fractional differencing. *Biometrika* 68 (1981), 165-176.

[9] Porter-Hudak, S.: An application of seasonal fractionally differenced model to the monetary aggregates. *J. Amer. Statistical Assoc.* 85 (1990), 338-344.

[10] Tanaka, K.: The nonstationary fractional unit root. *Econometric Theory* 15 (1999), 549-582.

[11] Woodward, W.A., Cheng, Q.C., and Gray, H.L.: A k-factor long-memory model. *J. Time Ser. Anal.* 19 (1998), 485-504.

[12] 本多正久: 経営のための需要の分析と予測. 産能大学出版部，(2000).

[13] 矢島美寛: 長期記憶を持つ時系列モデル. 経済時系列の統計ーその数理的基礎，統計科学のフロンティア第 8 巻，岩波書店，(2003), 103-202.

[14] 山本拓: 経済の時系列分析. 創文社，(1988).